چهارشنبه
۱۴۰۴/۰۱/۱۳

جامع مشتق و کاربرد مشتق
(فصل ۴ و ۵ دوازدهم)

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی
ریاضی

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضی	حسین شفیع‌زاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده مهرداد کیوان	فرشاد حسن‌زاده ارسلان حسنوند ـ سجاد احمدی

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم	هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی + مشتق و کاربرد مشتق	الگو و دنباله +توان‌های گویا + جامع هندسه	جامع شمارش، بدون شمردن و آمار و احتمال

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دانش آموزان عزیز ماز

امیدواریم از آزمون امروزتون لذت برده باشین.

اهمیت مشتق و کاربردش!

بچه‌ها مشتق تعریف حدیه شیب خطه! یادتونه شیب خط چی بود؟! آره همون اختلاف‌ها بر اختلاف‌هاست!

مشتق شکل حدیشه که توی این حالت یکی از نقاط رو به دیگری نزدیک می‌کنیم و شیب رو حساب می‌کنیم، اینجوری این شیب دقیقاً همون شیب خط مماس میشه و به مشتق، شیب خط مماس هم میگن.

مشتق آنقدر کاربردی و مهمه که تقریباً توی همه مسائل زندگی مثل بهینه کردن همه مسائل (بهینه کردن سود یه مغازه یا شرکت)، میزان تغییرات یه کمیت (میزان تغییرات سرعت یه خودرو) و غیره و غیره استفاده میشه.

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

برای یادگیری بهتر این بخش باید یه مرور روی بخش تابع، حد و مثلثات داشته باشید. چون مشتق تقریباً به تحلیل و بررسی این موضوعات می‌پردازد. البته بخش کاربرد مشتق رو میشه گفت ترکیب مشتق و معادله ـ نامعادله است، پس برای یادگیری کاربرد مشتق قطعاً نیاز به تسلط کامل روی این دو موضوع دارید.

این بخش در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

برای یادگیری فصل کاربرد مشتق باید حتماً روی بخش مشتق تسلط زیادی داشته باشید. البته در فیزیک دوازدهم فصل یک (سینماتیک) نیز به شدت کاراست.

از این بخش‌ها در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از کدام موضوعات بوده است؟

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ نوبت اول	۱۴۰۲ نوبت دوم	۱۴۰۳ نوبت اول	۱۴۰۳ نوبت دوم
تعداد سوال	۵	۳	۲	۲	۴	۲
مباحث مطرح شده در سوال	مشتق تابع مرکب مشتق‌پذیری اکسترمم نسبی بهینه‌سازی بهینه‌سازی	معادله خط مماس بر منحنی اکسترمم نسبی بهینه‌سازی	معادله خط مماس بر منحنی اکسترمم مطلق	مشتق تابع مرکب بهینه‌سازی	معادله خط مماس بر منحنی آهنگ تغییر اکسترمم نسبی بهینه‌سازی	معادله خط مماس بر منحنی بهینه‌سازی

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنین که به‌نظرم **تحلیل** آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان... ✿

حسین شفیع‌زاده - رتبهٔ ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز

۱- اگر f در $x=۲$ پیوسته و $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۲-h)-۳}{h}=۲$ باشد، حاصل مشتق تابع $g(x)=xf^{۲}(\frac{۲}{x})$ در نقطهٔ $x=۱$ چقدر است؟

۱) ۳۳ ۲) ۱۵ ۳) ۵ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲-h)-۳}{h}=-f'(۲)\Rightarrow\begin{cases}f'(۲)=-۲\\ f(۲)=۳\end{cases}$$

$$g'(x)=f^{۲}(\frac{۲}{x})+۲f(\frac{۲}{x}).f'(\frac{۲}{x})(\frac{-۲}{x^{۲}}\times x)$$

$$g'(۱)=f^{۲}(۲)-۴f(۲)f'(۲)=۹-۴\times ۳\times(-۲)=۳۳$$

مشتق

تعریف: تابع f را که در همسایگی نقطه $x=a$ تعریف شده است را در نظر می‌گیریم. به حد زیر در صورت وجود، **مشتق** تابع f در نقطهٔ a گفته می‌شود و با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم:

تعریف مشتق: $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق راست: $$f'_{+}(a)=\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق چپ: $$f'_{-}(a)=\lim_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

بیان تعریف مشتق با ظاهری دیگر:

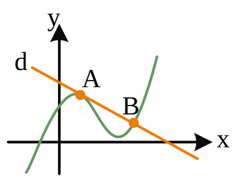
تعریف دوم مشتق: $$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشتق راست: $$f'_{+}(x)=\lim_{h\to ۰^{+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشتق چپ: $$f'_{-}(x)=\lim_{h\to ۰^{-}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

گروه آموزشی ماز

۲- در شکل مقابل، خط d در نقطه $A(۲,۳)$ بر نمودار تابع f مماس و در نقطه $B(۲a+۲,a)$ آن را قطع می‌کند. اگر $f'(۲)=-۱$ باشد، مقدار a کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

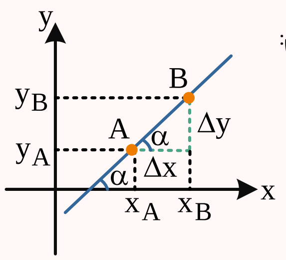
پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

شیب خط مماس برابر ۱- است.

$$-۱=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۳-a}{۲-۲a-۲}=\frac{۳-a}{-۲a}\Rightarrow ۲a=۳-a\Rightarrow a=۱$$

یادآوری از شیب خط

اگر خطی از دو نقطه $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ عبور کند، می‌توانیم **شیب** آن خط را با استفاده از رابطه زیر پیدا کنیم:



$$\text{شیب خط}=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

حال اگر زاویه بین یک خط با جهت مثبت محور xها معلوم باشد، می‌توانیم شیب آن خط را با استفاده از رابطه زیر به دست بیاوریم:

$$\text{شیب خط} = m = \tan\alpha$$

$\alpha =$ زاویه خط با جهت مثبت محور xها

گروه آموزشی ماز

۳- مقدار مشتق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{(\frac{۳x+۲}{x-۱})^۲}$ به ازای $x=۲$ چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$
۲) $-\frac{۱۰}{۳}$
۳) $-\frac{۵}{۳}$
۴) $\frac{۱۰}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ — آزمون وی ای پی — (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

$$f(x)=(\frac{۳x+۲}{x-۱})^{\frac{۲}{۳}}$$

$$f'(x)=\frac{۲}{۳}(\frac{۳x+۲}{x-۱})^{-\frac{۱}{۳}}\times\frac{-۵}{(x-۱)^۲}$$

$$f'(۲)=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{\sqrt[۳]{۸}}\times\frac{-۵}{۱}=\frac{-۵}{۳}$$

دقت کنید که مشتق $\frac{۳x+۲}{x-۱}$ به صورت زیر محاسبه شده است.

$$y=\frac{۳x+۲}{x-۱}\Rightarrow y'=\frac{۳(x-۱)-(۳x+۲)}{(x-۱)^۲}=\frac{-۵}{(x-۱)^۲}$$

مشتق تابع چندجمله‌ای

اگر $n\in\mathbb{Q}$ و $f(x)=x^n$ باشد، آن‌گاه $f'(x)=nx^{n-۱}$ است.

توجه:
اگر عددی در یک تابع ضرب شود، برای مشتق‌گیری، ابتدا ضریب عددی را کنار گذاشته و عمل مشتق را انجام می‌دهیم. سپس آن ضریب را در تابع مشتق ضرب می‌کنیم. به عبارت دیگر، اگر f تابعی مشتق‌پذیر و $k\in\mathbb{R}$ باشد، داریم:

$$y=kf(x)\Rightarrow y'=kf'(x)$$

به عنوان مثال:

$$f(x)=۳x^۴\Rightarrow f'(x)=۳(۴x^۳)=۱۲x^۳$$

$$g(x)=۲x^{-۳}\Rightarrow g'(x)=۲(-۳x^{-۴})=-۶x^{-۴}$$

$$h(x)=x^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow h'(x)=\frac{۲}{۳}x^{\frac{۲}{۳}-۱}=\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۱}{x^{\frac{۱}{۳}}}=\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$k(x)=\frac{۱}{x^۵}\Rightarrow k(x)=x^{-۵}\Rightarrow k'(x)=-۵x^{-۶}$$

مشتق‌گیری از توابع به فرم $y=\sqrt[n]{(f(x))^m}$

$$y=\sqrt[n]{(f(x))^m}\Rightarrow y'=\frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$$

به عنوان مثال:

$$y=\sqrt[۳]{(x^۲-x+۱)}\xrightarrow[n=۳]{m=۱}y'=\frac{۲x-۱}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-x+۱)^۲}}$$

گروه آموزشی ماز

۴- اگر $f(x)=\frac{x}{3x-2}$ و $g(x)=3+\frac{2}{x}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)-5}{x-1}$ به کمک تعریف مشتق کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۹- ۴) ۱۲-

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

حاصل حد خواسته شده، همان $(fg)'(1)$ است.

$$h(x)=f(x)g(x)=\frac{x}{3x-2}\times\frac{3x+2}{x}=\frac{3x+2}{3x-2}$$

$$h'(x)=\frac{-12}{(3x-2)^2}\Rightarrow h'(1)=-12$$

گروه آموزشی ماز

۵- در نقطه‌ای با کدام طول واقع بر منحنی $y=x^3+2x-1$ خط مماس بر منحنی، بر خط $7y+3x=2$ عمود است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

شیب خط برابر $-\frac{3}{7}$ است، پس شیب مماس یا همان y' برابر $\frac{7}{3}$ است.

$$y'=3x^2+2\Rightarrow 3x^2+2=\frac{7}{3}\Rightarrow x^2=\frac{1}{9}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{3}$$

گروه آموزشی ماز

۶- تابع $f(x)=\begin{cases}2x^2-x & |x|>1\\ ax+b & |x|\le 1\end{cases}$ در $x=-1$ مشتق‌پذیر است. مقدار $f'_-(1)+f(1)$ چه عددی است؟

۱) ۹- ۲) ۷- ۳) ۱۲- ۴) ۱۳-

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

شرط پیوستگی f را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=f(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)\Rightarrow 2+1=3=-a+b$$

حال شرط برابری مشتق چپ و راست را بررسی می‌کنیم:

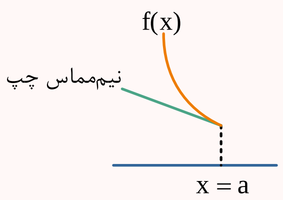
$$f'(x)=\begin{cases}4x-1 & x>1 \text{ یا } x<-1\\ a & -1\le x<1\end{cases}$$

$$f'_-(-1)=f'_+(-1)\Rightarrow a=-5\Rightarrow b=-2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'_-(1)=a=-5\\ f(1)=a+b=-7\end{cases}\Rightarrow f'_-(1)+f(1)=-12$$

مشتق چپ تابع f(x) در نقطه $x=a$

اگر تابع f(x) در نقطه‌ای به طول $x=a$ از چپ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق چپ تابع f در این نقطه، همان شیب نیم‌خطی است که در سمت چپ $x=a$ بر نمودار تابع f مماس می‌شود که به این نیم‌خط، اصطلاحاً نیم‌مماس چپ می‌گوییم.



$$\begin{cases}f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ f'_-(a)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\end{cases}$$

$f'_-(a)=$ شیب نیم‌مماس چپ در $x=a$

نکته

شرط لازم برای وجود مشتق چپ در نقطه $x=a$ ، این است که تابع f در این نقطه از چپ پیوسته باشد، به عبارت دیگر، اگر تابع f در نقطه $x=a$ پیوستگی چپ نداشته باشد، آن‌گاه در این نقطه مشتق چپ تعریف نمی‌شود.

حالا این نیم‌مماسی که میگین رو کدوم خط قرار داره؟

معادله نیم‌مماس چپ در نقطه $x=a$ برابر است با: $y-f(a)=f'_-(a)(x-a)$

۷- اگر $f(x)=\dfrac{x-۲}{\sqrt{۲x^۲+۱}}$ باشد، مقدار مشتق تابع $y=xf(۱+\dfrac{۳}{x})$ در نقطه $x=۳$ چقدر است؟

۱) $\dfrac{۱}{۳}$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) $-\dfrac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

برای محاسبهٔ مشتق $f(۱+\dfrac{۳}{x})$ در $x=۳$ کافی است $f'(۲)$ را به‌دست آوریم، از عامل صفرکنندهٔ $x-۲$ استفاده می‌کنیم:

$$f'(۲)=\frac{۱}{\sqrt{۲x^۲+۱}}=\frac{۱}{۳}$$

$$y=xf(۱+\frac{۳}{x})$$

$$y'=f(۱+\frac{۳}{x})+x(-\frac{۳}{x^۲})f'(۱+\frac{۳}{x})$$

$$y'(۳)=f(۲)-f'(۲)=۰-\frac{۱}{۳}=-\frac{۱}{۳}$$

مشتق تابع رادیکالی

اگر $f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$(*)f(x)=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}\Rightarrow f'(x)=\frac{m}{n}\times x^{\frac{m}{n}-۱}=\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}=\frac{m}{n\times x^{\frac{n-m}{n}}}=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

به عبارت دیگر:

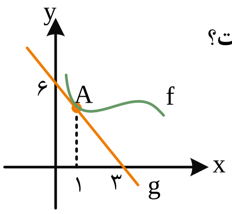
$$f(x)=\sqrt[n]{x^m}\Rightarrow f'(x)=\frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

به عنوان مثال:

ازمون وی ای پی

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[n=۲]{m=۱}f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

۸- در شکل مقابل، خط g بر نمودار f در $x=۱$ مماس است. حاصل مشتق تابع $y=\dfrac{f(x)}{x-g(x)}$ در نقطهٔ $x=۱$ چقدر است؟



۱) $-\dfrac{۳}{۲}$
۲) $-\dfrac{۲}{۳}$
۳) $-\dfrac{۱}{۲}$
۴) $-\dfrac{۱}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

معادله g: $g(x)=-۲x+۶ \Rightarrow f'(۱)=-۲$

مختصات A: $A(۱,۴)$

$$y=\frac{f(x)}{x-g(x)}=\frac{f(x)}{۳x-۶}$$

$$y'=\frac{f'(x)(۳x-۶)-۳f(x)}{(۳x-۶)^۲}$$

$$y'(۱)=\frac{-۳f'(۱)-۳f(۱)}{۹}=\frac{۶-۱۲}{۹}=\frac{-۲}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=۲x^۲+x$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{fog(x)}-\sqrt{۵}}{x^۲-۱}$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$
۲) $\sqrt{۵}$
۳) $\dfrac{\sqrt{۵}}{۴}$
۴) $\dfrac{\sqrt{۵}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

ابتدا دقت کنید که:

$$(fog)'(x)=g'(x).f'(g(x))$$

$$(fog)'(۱)=g'(۱).f'(۳)=۵\times ۲=۱۰$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{fog(x)}-\sqrt{۵}}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{fog(x)-۵}{(x-۱)\underbrace{(x+۱)}_{۲}\underbrace{(\sqrt{fog(x)}+\sqrt{۵})}_{۲\sqrt{۵}}}$$

$$=\frac{۱}{۴\sqrt{۵}}(fog)'(۱)=\frac{۱۰}{۴\sqrt{۵}}=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- اگر برای هر x رابطهٔ $f'(x)=۲xf(x)$ برقرار باشد، حاصل مشتق دوم $y=f(۲x)$ در نقطهٔ $x=۱$ چند برابر $f(۲)$ است؟

۱) ۹۶
۲) ۴۸
۳) ۳۶
۴) ۷۲

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

از دو طرف فرض سوال مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=۲xf(x)$$

$$f''(x)=۲f(x)+۲xf'(x)=۲f(x)+۲x(۲xf(x))=(۴x^۲+۲)f(x)$$

$$y=f(۲x)\Rightarrow y'=۲f'(۲x)\Rightarrow y''=۴f''(۲x)$$

$$\Rightarrow y''(۱)=۴f''(۲)=۴\times ۱۸f(۲)=۷۲f(۲)$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- اگر $f(x)=x+۴\sqrt{x}$ و $g(x)=(۲-\sqrt{x+۴})^{۳}$ باشد، حاصل $f'(۴).g'(f(۴))$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ۲) -۳ ۳) ۳ ۴) $\frac{۳}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

ابتدا gof را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x)=(۲-\sqrt{x+۴\sqrt{x}+۴})^{۳}=(۲-\sqrt{(\sqrt{x}+۲)^{۲}})^{۳}=(۲-\sqrt{x}-۲)^{۳}=-x\sqrt{x}\Rightarrow (gof)'(x)=(-x^{\frac{۳}{۲}})'$$

$$(gof)'(x)=-\frac{۳}{۲}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow (gof)'(۴)=f'(۴).g'(f(۴))=-\frac{۳}{۲}\sqrt{۴}=-۳$$

تو این سوالات مشتق، باید دنده عقب بریم!

در بعضی از سوالات عبارتی با ظاهر نسبتاً پیچیده را به ما می‌دهند و حاصل آن را از ما می‌پرسند، در این گونه موارد معمولاً با طرف دوم مشتق مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم دو تابع و یا با طرف دوم مشتق ترکیب توابع مواجهیم که در ادامه چند نمونه مهم که در اکثر تست‌ها مورد سوال قرار می‌گیرند را برایتان لیست می‌کنیم:

- $f'(x)\pm g'(x)=(f\pm g)'(x)$
- $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(f.g)'(x)$
- $f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=g^{۲}(x)(\frac{f}{g})'(x)\ ;\ (g(x)\neq ۰)$
- $\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^{۲}}=(\frac{f}{g})'(x)\ ;\ (g(x)\neq ۰)$
- $۲f(x)f'(x)=(f^{۲}(x))'$
- $f'(x)g'(f(x))=(gof)'(x)$

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر $f(x)=۳x-۱$ و $g(x)=x(۲x+۱)$ باشد، آهنگ تغییرلحظه‌ای تابع $y=fog(x)$ در نقطهٔ $x=۲$ چقدر با آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[۰,۲]$ اختلاف دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

$$f'(x)=۳\ ,\ g'(x)=۴x+۱$$

تابع fog درجه دوم است، پس آهنگ متوسط آن در بازهٔ $[۰,۲]$ با آهنگ لحظه‌ای آن در وسط بازه یعنی $x=۱$ برابر است.

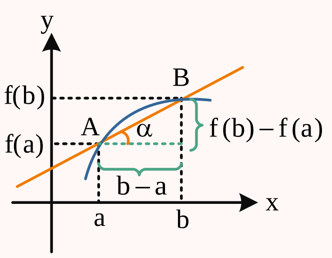
$$(fog)'(۲)=g'(۲).f'(g(۲))=۹\times ۳=۲۷$$

$$(fog)'(۱)=g'(۱)\times f'(g(۱))=۵\times ۳=۱۵$$

اختلاف دو مقدار ۲۷ و ۱۵ برابر ۱۲ است.

آهنگ متوسط تغییر

با توجه به شکل زیر، می‌توان گفت که آهنگ متوسط تغییر تابع f، با شیب خطی که دو نقطه A و B را به هم وصل می‌کند (شیب خط قاطع یا شیب خط واصل برابر است.



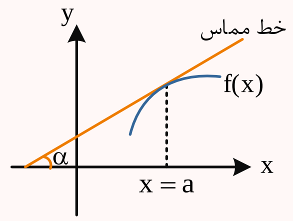
$$\text{شیب خط قاطع}=\tan\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

بنابراین آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a,b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر (آهنگ آنی تغییر)

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=a$ بنا به تعبیر هندسی، با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقطه برابر است و از طرفی می‌دانیم که شیب خط مماس در نقطه $x=a$ با مقدار مشتق تابع در آن نقطه برابر است، پس مطابق شکل زیر داریم:



$x=a$ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $=$ شیب خط مماس $=\tan\alpha = f'(a)$

بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه $x=a$ برابر است با: $f'(a)$

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $f(x)=a+\frac{b}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)+f''(x)}=\frac{1}{7}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۴)

$$f'(x)=-\frac{b}{x^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{2b}{x^3}$$

مخرج کسر حد باید صفر باشد، چون جواب حد صفر نیست.

$$f(1)+f''(1)=0\Rightarrow a+b+2b=0\Rightarrow a=-3b$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)+f''(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{a+\frac{b}{x}+\frac{2b}{x^3}}=\lim_{x\to 1}\frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{x^3}(x-1)}{ax^3+bx^2+2b}$$

$$\xrightarrow{a=-3b}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{-3bx^3+bx^2+2b}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(-3bx^2-2bx-2b)}=\frac{1}{-3b-2b-2b}=-\frac{1}{7b}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{7b}=\frac{1}{7}\\ a=-3b\end{cases}\Rightarrow b=-1,\ a=3$$

میانبر (هوپیتال)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)+f''(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{a+\frac{b}{x}+\frac{2b}{x^3}}=\lim_{x\to 1}\frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{x^3}(x-1)}{ax^3+bx^2+2b}\xrightarrow{Hop}\lim_{x\to 1}\frac{1}{3ax^2+2bx}=\frac{1}{3a+2b}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{3a+2b}=\frac{1}{7}\Rightarrow 3a+2b=7\\ a=-3b\end{cases}\Rightarrow a=3, b=-1$$

مشتق مرتبه دوم چیه دیگه!

حال اگر بخواهیم **مشتق مرتبه دوم** تابع f، در نقطه $x=a$ را به کمک تعریف مشتق بیان کنیم، داریم:

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

مشتق تقسیم دو تابع

$$y=\left(\frac{f}{g}\right)(x)\Rightarrow y'=\frac{\underbrace{f'(x)}_{\text{مشتق صورت}}\ \underbrace{g(x)}_{\text{مخرج}}-\underbrace{g'(x)}_{\text{مشتق مخرج}}\ \underbrace{f(x)}_{\text{صورت}}}{\underbrace{(g(x))^2}_{(\text{مخرج})^2}},\quad g(x)\neq 0$$

به عنوان مثال:

$$y=\frac{5-3x}{x^3+1}\Rightarrow y'=\frac{\overbrace{(-3)}^{\text{مشتق صورت}}\overbrace{(x^3+1)}^{\text{مخرج}}-\overbrace{(3x^2)}^{\text{مشتق مخرج}}\overbrace{(5-3x)}^{\text{صورت}}}{\underbrace{(x^3+1)^2}_{(\text{مخرج})^2}}$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- تابع $f(x)=\frac{x^2-5}{\sqrt{x+2}}$ دارای چند نقطه بحرانی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ آزمون وی ای پی **(متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)**

$$D_f=(-2,+\infty)\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\sqrt{x+2}-\frac{x^2-5}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$f'(x)=\frac{4x(x+2)-x^2+5}{2(x+2)\sqrt{x+2}}=\frac{3x^2+8x+5}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+8x+5=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x=-\frac{5}{3}\end{cases}$$

$x=-2$ طول نقطه بحرانی تابع نیست، چون تابع در این نقطه تعریف نشده است، پس تابع فقط ۲ نقطه بحرانی با طول -1 و $-\frac{5}{3}$ دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۵- اگر $x=\alpha$ طول یکی از نقاط بحرانی تابع $f(x)=x-4\sqrt{2x+3}$ باشد، $f(\alpha)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{19}{2}$ ۲) $-\frac{21}{2}$ ۳) -3 ۴) $-\frac{13}{2}$

پاسخ: گزینه ۱ **(آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)**

$$D=[-\frac{3}{2},+\infty)\ ,\ f(-\frac{3}{2})=-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=1-\frac{4}{\sqrt{2x+3}}=0\Rightarrow\sqrt{2x+3}=4\Rightarrow 2x+3=16\Rightarrow x=\frac{13}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{13}{2}$$

$$f(\frac{13}{2})=\frac{13}{2}-4\sqrt{16}=\frac{13}{2}-16=\frac{13-32}{2}=\frac{-19}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- حاصل‌ضرب بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=\sqrt{2x}+\sqrt{8-x}$ چه عددی است؟

۱) $8\sqrt{6}$ ۲) $8\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{3}$ ۴) $6\sqrt{3}$

پاسخ: گزینه ۳ **(سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)**

$$D_f=[0,8]\Rightarrow\begin{cases}f(0)=2\sqrt{2}\\ f(8)=4\end{cases}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}\Rightarrow f'(x)=0$$

$$\sqrt{2x}=2\sqrt{8-x}\Rightarrow 2x=4(8-x)\Rightarrow 2x=32-4x\Rightarrow x=\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$$

$$f(\frac{16}{3})=\sqrt{\frac{32}{3}}+\sqrt{\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}(3)=\sqrt{24}$$

$$\begin{matrix} \max = \sqrt{۲۴} \\ \min = ۲\sqrt{۲} \end{matrix} \Rightarrow \max.\min = \sqrt{۲۴} \times ۲\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۴۸} = ۸\sqrt{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- تابع $f(x)=x+۲\sqrt{a-x}$ در بازه‌ای نزولی اکید است، حداکثر مقدار طول بازه چه عددی است؟

۱) a ۲) ۱ ۳) $۲a$ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

$D_f = (-\infty, a]\ ,\ f'(x) < ۰$

$$f'(x) = ۱ + \frac{-۲}{۲\sqrt{a-x}} < ۰ \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{\sqrt{a-x}} < ۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{a-x} < ۱ \Rightarrow a-x < ۱ \Rightarrow x > a-۱$$

بازه‌ای که تابع نزولی اکید است $(a-۱, a)$ است و طول بازه همواره ۱ است.

گروه آموزشی ماز

۱۸- تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-\frac{۳a+۱}{۲}x^۲+۳ax$ فقط در یک بازه به طول ۸ واحد نزولی اکید است. مقدار مثبت a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

$f'(x) = x^۲ - (۳a+۱)x + ۳a$

تابع در یک بازه نزولی اکید است، پس $f'(x) < ۰$، همچنین در تابع $f'(x)$ جمع ضرایب صفر است.

$$f'(x) = (x-۱)(x-۳a) \Rightarrow f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۳a \end{cases}$$

$۳a - ۱ = ۸ \Rightarrow ۳a = ۹ \Rightarrow a = ۳$

گروه آموزشی ماز

۱۹- اگر ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x-۲\sqrt{۵-x^۲}+k$ برابر $۵+\sqrt{۵}$ باشد، مینیمم مطلق تابع چه عددی است؟

۱) $\sqrt{۵}-۵$ ۲) $۵-\sqrt{۵}$ ۳) $-\sqrt{۵}$ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

$f(x) = x - ۲\sqrt{۵-x^۲} + k$

$$D_f = \left[-\sqrt{۵}, \sqrt{۵}\right] \Rightarrow \begin{cases} f(\sqrt{۵}) = \sqrt{۵} + k \\ f(-\sqrt{۵}) = -\sqrt{۵} + k \end{cases}$$

$$f'(x) = ۱ - ۲ \times \frac{-۲x}{۲\sqrt{۵-x^۲}} = ۱ + \frac{۲x}{\sqrt{۵-x^۲}} = \frac{\sqrt{۵-x^۲} + ۲x}{\sqrt{۵-x^۲}}$$

$f'(x) = ۰ \Rightarrow \sqrt{۵-x^۲} = -۲x \quad x < ۰$

$$۵ - x^۲ = ۴x^۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \text{ غ ق ق} \\ x = -۱ \Rightarrow f(-۱) = -۱ - ۴ + k = k - ۵ \end{cases}$$

$\max = \sqrt{۵} + k = ۵ + \sqrt{۵} \Rightarrow k = ۵$

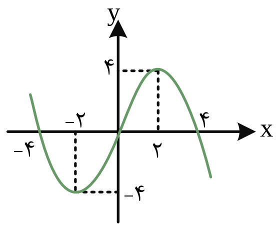
$\min = -۵ + k \Rightarrow \min = ۰$

گروه آموزشی ماز

۲۰- اکسترمم‌های تابع $y=۴x-x|x|$ در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟

۱) $۴\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)



$$y=\begin{cases}۴x-x^{۲} & x\geq ۰\\ ۴x+x^{۲} & x\leq ۰\end{cases}$$

اکسترمم‌های تابع $A\left|\begin{matrix}۲\\۴\end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix}-۲\\-۴\end{matrix}\right.$ هستند.

$$AA'=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۱۶\times ۵}=۴\sqrt{۵}$$

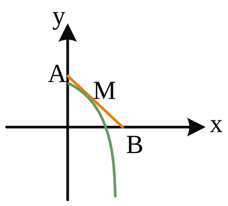
گروه آموزشی ماز

۲۱- خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=۴-x^{۲}$ در نقطه‌ای با طول مثبت α محورهای مختصات را در A و B قطع می‌کند، حداقل مساحت مثلث OAB که O مبدأ مختصات باشد، به ازای چه مقداری از α به دست می‌آید؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳ ا زمون وی ای پی (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

اگر نقطه تماس $M\left|\begin{matrix}\alpha\\۴-\alpha^{۲}\end{matrix}\right.$ باشد، $y'=-۲x$:



$M\left|\begin{matrix}\alpha\\۴-\alpha^{۲}\end{matrix}\right.$ و $-۲\alpha=$ شیب خط مماس

خط مماس: $y=-۲\alpha x+۴+\alpha^{۲}$

$A\left|\begin{matrix}۰\\۴+\alpha^{۲}\end{matrix}\right.$ $B\left|\begin{matrix}\frac{۴+\alpha^{۲}}{۲\alpha}\\۰\end{matrix}\right.$

$$S=\frac{۱}{۲}\times\left(\frac{۴+\alpha^{۲}}{۲\alpha}\right)\times(۴+\alpha^{۲})=\frac{(۴+\alpha^{۲})^{۲}}{۴\alpha}$$

$$S'=۰\Rightarrow ۴\alpha(۴+\alpha^{۲})(۴\alpha)-۴(۴+\alpha^{۲})^{۲}=۰$$

$$(۴+\alpha^{۲})(۱۶\alpha^{۲}-۱۶-۴\alpha^{۲})=۰\Rightarrow \alpha^{۲}=\frac{۱۶}{۱۲}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow \alpha=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

بهینه‌سازی

به محاسبه اکسترمم‌های مطلق یک تابع در صنعت، پزشکی، مهندسی و ... بهینه‌سازی می‌گویند.

در مسئله‌های بهینه‌سازی معمولاً یافتن دامنه متغیر بر عهده خود ماست.

مسئله‌های بهینه‌سازی ۳ حالت کلی دارند:

الف) یک متغیره که فرمول مسئله را داده‌اند.

ب) یک متغیره که فرمول مسئله را نداده‌اند و باید خودمان بیابیم.

ج) دو یا چند متغیره که ابتدا باید آن را به یک متغیره تبدیل کنیم.

نکته ۱: اگر جمع دو عدد مثبت ثابت باشد، ضرب آن‌ها موقعی ماکزیمم است که برابر باشند.

نکته ۲: اگر ضرب دو عدد مثبت ثابت باشد، جمع آن‌ها موقعی مینیمم است که برابر باشند.

گروه آموزشی ماز

-۲۲ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x-a}{(x+a)^۲}$ از خط $y=۱$ به فاصله $\frac{۱۵}{۱۶}$ است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

$$f'(x)=\frac{(x+a)^۲-۲(x+a)(x-a)}{(x+a)^۴}=\frac{x+a-۲x+۲a}{(x+a)^۳}$$

$$f'(x)=\frac{۳a-x}{(x+a)^۳}=۰\ ,\ x=۳a\ ,\ A\left|\begin{array}{l}۳a\\ \frac{۱}{۸a}\end{array}\right.$$

قرار است اکسترمم تا خط $y=۱$ به فاصله $\frac{۱۵}{۱۶}$ باشد.

$$۱-\frac{۱}{۸a}=\frac{۱۵}{۱۶}\Rightarrow\frac{۱}{۸a}=\frac{۱}{۱۶}\Rightarrow a=۲$$

گروه آموزشی ماز

-۲۳ اگر $f(x)=\frac{ax+b}{-x+۲}$ به طوری که $A(۱,۳)$ نقطه اکسترمم نسبی $y=xf(-x)$ باشد،مقدار b کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۳ ۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

$$y=xf(-x)=x(\frac{-ax+b}{x+۲})=\frac{-ax^۲+bx}{x+۲}$$

$$y'=\frac{(-۲ax+b)(x+۲)-(-ax^۲+bx)}{(x+۲)^۲}$$

$$y(۱)=۳\Rightarrow\frac{-a+b}{۳}=۳\Rightarrow b-a=۹$$

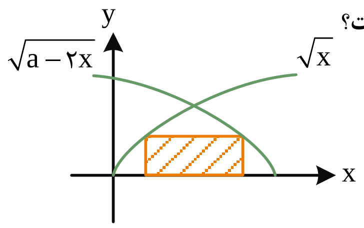
$$y'(۱)=۰\Rightarrow ۳(b-۲a)+a-b=۰$$

$$-۲\begin{cases}۲b-۵a=۰\\ b-a=۹\end{cases}\Rightarrow -۳a=-۱۸\Rightarrow\begin{cases}a=۶\\ b=۱۵\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{۶x+۱۵}{-x+۲}\ ,\ y=\frac{-۶x^۲+۱۵x}{x+۲}$$

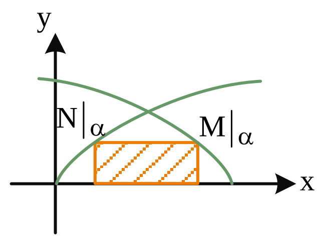
گروه آموزشی ماز

-۲۴ اگر بیشترین مساحت مستطیل که در شکل مقابل نمایش داده شده است، برابر $\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۹}$ باشد، a کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۲۴
۳) ۱۲
۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)



$$M\left|\begin{array}{l}\frac{a-\alpha^۲}{۲}\\ \alpha\end{array}\right.\ ,\ N\left|\begin{array}{l}\alpha^۲\\ \alpha\end{array}\right.$$

$S=\alpha(\frac{a-\alpha^۲}{۲}-\alpha^۲)=\frac{\alpha}{۲}(a-۳\alpha^۲)$ مستطیل

$$S(\alpha)=\frac{۱}{۲}(a\alpha-۳\alpha^{۳})\quad S'=۰\Rightarrow a-۹\alpha^{۲}=۰\Rightarrow \alpha=\frac{\sqrt{a}}{۳}$$

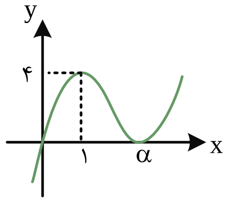
به ازای $\alpha=\frac{\sqrt{a}}{۳}$ مساحت بیشترین است.

$$S_{max}=\frac{\sqrt{a}}{۶}(a-\frac{a}{۳})=\frac{\sqrt{a}}{۶}\times\frac{۲}{۳}a=\frac{a\sqrt{a}}{۹}$$

$$S_{max}=\frac{a\sqrt{a}}{۹}=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۹}\Rightarrow a\sqrt{a}=۱۶\sqrt{۲}\Rightarrow a=۸$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- اگر نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx$ شکل مقابل باشد، مقدار α کدام است؟



۱) ۲/۵

۲) ۳/۵

۳) ۲

۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

$$f(۱)=۴\ ,\ ۱+a+b=۴$$

$$f'(x)=۳x^{۲}+۲ax+b$$

$$f'(۱)=۰\Rightarrow ۳+۲a+b=۰$$

$$-\begin{cases}a+b=۳\\ ۲a+b=-۳\end{cases}\Rightarrow a=-۶\ ,\ b=۹$$

$$f(x)=x^{۳}-۶x^{۲}+۹x=x(x-۳)^{۲}\Rightarrow \alpha=۳$$

گروه آموزشی ماز